Çözümlü Problemler

Prob. 1 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)}$ *serisinin yakınsaklığını gösteriniz ve toplamını bulunuz.*

Çözüm : S_n kısmî toplamlar dizisinin genel terimini oluşturalım:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+3}\right) \end{aligned}$$

bulunur. $\{S_n\}$ kısmî toplamlar dizisinin monotonluğunu inceleyelim:

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= \frac{1}{2}\left\{\left(1 - \frac{1}{2n+5}\right) - \left(1 - \frac{1}{2n+3}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+5}\right) = \frac{1}{(2n+3)(2n+5)} > 0 \end{aligned}$$

olduğundan, $\{S_n\}$ kısmî toplamlar dizisi artandır.

$$S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+3}\right) < \frac{1}{2}$$

ve böylece $\{S_n\}$ kısmî toplamlar dizisi üstten sınırlıdır. O hâlde, $\sum\limits_{n} \dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)}$ serisi yakınsaktır. Toplamını bulalım:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \\ &= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2n+3}\right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

elde edilir.

Açıklama. Yukarıdaki toplam, sayma indisi düzenlemesiyle de yapılabilir:

$$\begin{aligned} 2S_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+3} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2k+1} \\ &= 1 - \frac{1}{2(n+1)+1} = 1 - \frac{1}{2n+3} \end{aligned}$$

Prob. 2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{16n^2-8n-3}$ *serisinin yakınsaklığını gösteriniz ve toplamını bulunuz.*

Çözüm : S_n kısmî toplamlar dizisinin genel terimini oluşturalım:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{16k^2-8k-3} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4k-3}-\frac{1}{4k+1}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left\{\left(1-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{13}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4n+1}\right) \end{aligned}$$

bulunur. $\{S_n\}$ kısmî toplamlar dizisinin monotonluğunu inceleyelim:

$$\begin{aligned} S_{n+1}-S_n &= \frac{1}{4}\left\{\left(1-\frac{1}{4n+5}\right)-\left(1-\frac{1}{4n+1}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{4n+5}\right) = \frac{1}{(4n+1)(4n+5)} > 0 \end{aligned}$$

olduğundan, $\{S_n\}$ kısmî toplamlar dizisi artandır.

$$S_n = \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4n+1}\right) < \frac{1}{4}$$

ve böylece $\{S_n\}$ kısmî toplamlar dizisi üstten sınırlıdır. O hâlde, $\sum\limits_{n} \dfrac{1}{16n^2-8n-3}$ serisi yakınsaktır. Toplamını bulalım:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16n^2-8n-3} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{16k^2-8k-3} = \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{4n+1}\right) = \frac{1}{4}$$

elde edilir.

Prob. 3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{9n^2+3n-2}$ *serisinin yakınsaklığını gösteriniz ve toplamını bulunuz.*

Çözüm : S_n kısmî toplamlar dizisinin genel terimini bulalım:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{9k^2+3k-2} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k+2}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{11}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right) \end{aligned}$$

olur. $\{S_n\}$ kısmî toplamlar dizisinin monotonluğunu inceleyelim:

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= \frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+5}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+5}\right) \\ &= \frac{1}{(3n+2)(3n+5)} > 0 \end{aligned}$$

olduğundan, $\{S_n\}$ kısmî toplamlar dizisi artandır.

$$S_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2}\right) < \frac{1}{6}$$

dır. Böylece, $\{S_n\}$ kısmî toplamlar dizisi üstten sınırlıdır. O hâlde, $\sum_n \frac{1}{9n^2+3n-2}$ serisi yakınsaktır. Toplamını bulalım:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2+3n-2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{9k^2+3k-2} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2}\right) = \frac{1}{6}$$

Prob. 4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{(3^{n+1}-2^{n+1})(3^n-2^n)}$ *serisinin toplamını bulunuz.*

Çözüm : $6^n = 3 \cdot 3^n 2^n - 2 \cdot 2^n 3^n = 3^n(3^{n+1} - 2^{n+1}) - 3^{n+1}(3^n - 2^n)$ dir.

$$\begin{aligned} S_m &= \sum_{k=1}^{m} \frac{6^n}{(3^{n+1}-2^{n+1})(3^n-2^n)} \\ &= \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{3^n}{3^n-2^n} - \frac{3^{n+1}}{3^{n+1}-2^{n+1}}\right) \\ &= 3 - \frac{3^{m+1}}{3^{m+1}-2^{m+1}} \end{aligned}$$

$\lim_{n\to\infty} S_m = 2$ elde edilir.

Prob. 5 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!}$ *serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.*

Çözüm : Kısmi toplamlar dizisini oluşturalım;

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}\right) + \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{(n+1)!} \end{aligned}$$

olur. Her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$S_{n+1} - S_n = 1 - \frac{1}{(n+2)!} - \left(1 - \frac{1}{(n+1)!}\right) = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} > 0$$

ve $S_n = 1 - \dfrac{1}{(n+1)!} < 1$ olduğundan, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{(n+1)!}$ serisi yakınsaktır. Toplamını bulalım,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)!}\right) = 1$$

bulunur.

Prob. 6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n(n+1)}}$ *serisinin toplamını bulunuz.*

Çözüm : Genel terimi düzenlenirse

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right\} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 1$$

bulunur. Serinin toplamı $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = -1$ dir.

Prob. 7 $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \dfrac{\log(1+1/k)}{\log(k^{\log(k+1)})}$ *serisinin toplamını bulunuz.*

Çözüm : Genel terimi düzenlenirse

$$a_k = \frac{\log(1+1/k)}{\log(k^{\log(k+1)})} = \frac{\log(k+1) - \log k}{\log(k+1)\cdot\log(k)} = \frac{1}{\log(k)} - \frac{1}{\log(k+1)}$$

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \left\{ \frac{1}{\log(k)} - \frac{1}{\log(k+1)} \right\} = -\frac{1}{\log(n+1)} + \frac{1}{\log 2} \to \frac{1}{\log 2}$$

bulunur. Seri yakınsak ve toplamı $\dfrac{1}{\log 2}$ dir.

Prob. 8 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sin\left(\dfrac{1}{2^{n+1}}\right) \cdot \cos\left(\dfrac{3}{2^{n+1}}\right)$ *serisinin toplamını bulunuz.*

Çözüm : Genel terimi düzenlenirse

$$
\begin{aligned}
S_m &= \sum_{k=1}^{m} \sin\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)\cdot\cos\left(\frac{3}{2^{n+1}}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2}\left\{\sin\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{3}{2^{n+1}}\right)+\sin\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{3}{2^{n+1}}\right)\right\} \\
&= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2}\left\{\sin\left(-\frac{1}{2^{n}}\right)+\sin\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)\right\} \\
&= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2}\left\{\sin\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\sin\left(\frac{1}{2^{n}}\right)\right\} = \frac{1}{2}\sin 1
\end{aligned}
$$

bulunur. Seri yakınsak ve toplamı $\lim\limits_{m\to\infty} S_m = \frac{1}{2}\sin 1$ dir.

Prob. 9 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2-1}$ *serisi yakınsaktır?*

Çözüm : $a_n = \frac{n}{n^2-1}$ ise $(a_n) \to 0$ dır. $\frac{1}{a_n} = n - \frac{1}{n}$ için

$$
\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = n+1-\frac{1}{n+1}-\left(n-\frac{1}{n}\right) = \frac{n^2+n+1}{n(n+1)} > 0
$$

gerçeklenir. $(\frac{1}{a_n})$ dizisi artan ve bu nedenle de (a_n) dizisi azalan sıfır dizisidir. Leibniz teoremine göre verilen alterne seri yakınsaktır.

Prob. 10 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!\cdot 5^n}{n^n}$ *serisi yakınsaktır?*

Çözüm : *a*) Oran kriteri uygulanırsa,

$$
\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)!\cdot 5^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} : \frac{n!\cdot 5^n}{n^n} = 5\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to \frac{5}{e} > 1
$$

ve seri ıraksaktır.

Prob. 11 *Aşağıda serilerin yakınsaklığını inceleyiniz.*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n}\binom{3n}{n}$ *b*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\alpha+\frac{1}{n}\right)^n$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(3n)^n\cdot n!}$ *d*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

Çözüm : $a)$ Oran kriteri uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\frac{7^n}{7^{n+1}}\binom{3(n+1)}{n+1}\binom{3n}{n}^{-1} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{7}\cdot\frac{(3n+3)!\cdot n!\cdot(3n-n)!}{(n+1)!\cdot(3n+3-n-1)!\cdot(3n)!} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{7}\cdot\frac{(3n+3)!}{(n+1)!\cdot(2n+2)!}\,\frac{n!\cdot(2n)!}{(3n)!} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{7}\cdot\frac{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}{(n+1)\cdot(2n+1)(2n+2)}=\frac{27}{28}<1
\end{aligned}$$

elde edilir. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{7^n}\binom{3n}{n}$ serisi yakınsaktır.

$b)$ Kök kriterini uygulayalım:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\left|\alpha+\frac{1}{n}\right|=\alpha$$

olur. Seri $\alpha<1$ için yakınsak ve $\alpha>1$ için ıraksaktır. $\alpha=1$ ise $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>1$ olur. (a_n) dizisi bir sıfır dizisi değildir ve $\alpha=1$ için $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\alpha+\frac{1}{n}\right)^n$ serisi yakınsaktır.

$c)$ **Çözüm :** Oran kriteri uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)!\cdot(3n)^n\cdot n!}{(n+1)!\cdot(3n+3)^{n+1}\cdot(2n)!} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)\cdot(2n+1)}{(3n+3)\cdot(n+1)}\left(\frac{3n}{3n+3}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2(2n+1)}{(3n+3)}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}=\frac{4}{3e}<1
\end{aligned}$$

olur. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(3n)^n\cdot n!}$ serisi yakınsaktır.

$d)$ Oran kriteri uygulanırsa,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{((n+1)!)^2\cdot(2n)!}{(2(n+1))!\cdot(n!)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2(2n+1)}=\frac{1}{4}<1$$

olur. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ serisi yakınsaktır.

Prob. 12 *Aşağıda serilerin yakınsaklığını inceleyiniz.*

$a)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}\cdot 2^n}$ $\qquad$ $b)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\alpha}}{n!}$

Çözüm : $a)$ Kök kriterini uygulayalım:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{2n^n} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to \frac{e}{2} > 1$$

olur. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+1)^2}{n^{n^2}\cdot 2^n}$ serisi yakınsaktır.

$b)$ Oran kriterini uygulayalım:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha} \frac{1}{n+1} \to 0$$

çıkar. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \dfrac{n^\alpha}{n!}$ serisi her $\alpha \in \mathbb{R}$ için yakınsaktır.

Prob. 13 *Aşağıda serilerin yakınsaklığını inceleyiniz.*

$a)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n}-1)$ $\qquad$ $b)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a}-1)\,,\ a>1$

Çözüm : $a)$ Oran kriterinin limit biçimini uygulayalım:

$$a_n = \sqrt[n]{n}-1,\ b_n = \frac{1}{n}, \frac{a_n}{b_n} = n(\sqrt[n]{n}-1) \to \infty$$

olur. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ serisi ıraksak olduğundan $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi de ıraksaktır.

$b)$ Oran kriterinin limit biçimini uygulayalım:

$$a_n = \sqrt[n]{a}-1,\ b_n = \frac{1}{n}, \frac{a_n}{b_n} = n(\sqrt[n]{a}-1) \to \log a > 0$$

olur. İki seri aynı karekterdedir. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ serisi ıraksak olduğundan $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi de ıraksaktır.

Prob. 14 *Aşağıda serilerin yakınsaklığını inceleyiniz.*

$a)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n}-1)^n$ $\qquad$ $b)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a}-1)^n\,, a>1$

Çözüm : $a)$ Kök kriterini uygulayalım:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}-1\right) = 0 < 1$$

olduğundan $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi ıraksaktır.

$b)$ Kök kriterini uygulayalım:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{a}-1\right) = 0 < 1$$

olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi ıraksaktır.

Prob. 15 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{5^n (n!)^2}$ *serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.*

Çözüm : $a_n = \dfrac{(2n+1)!}{5^n (n!)^2}$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n > 0$ dır. D'Alambert oran kriterini uygulayalım:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)!}{5^{n+1}\left[(n+1)!\right]^2} \frac{5^n (n!)^2}{(2n+1)!} \\ &= \frac{1}{5} \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+3)}{(n+1)^2} = \frac{4}{5} < 1\end{aligned}$$

olduğundan verilen $\sum_n a_n$ serisi yakınsaktır.

Prob. 16 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{26^n (n!)^3}{(3n)!}$ *serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.*

Çözüm : $a_n = \dfrac{26^n (n!)^3}{(3n)!}$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n > 0$ dır. D'Alambert oran kriterini uygulayalım:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{26^{n+1}\left[(n+1)!\right]^3}{(3n+3)!} \frac{(3n)!}{26^n (n!)^3} \\ &= 26 \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} = \frac{26}{27} < 1\end{aligned}$$

olduğundan verilen $\sum_n a_n$ serisi yakınsaktır.

Prob. 17 *Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \neq 0$ olmak üzere (a_n) bir reel sayı dizisi olsun. $\sum_n a_n$ serisi yakınsak ise $\sum_n \frac{1}{a_n}$ serisi ıraksaktır.*

Çözüm : $\sum_n a_n$ yakınsak olduğundan $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ve bu nedenle $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} \neq 0$ olur. Genel terimi $\dfrac{1}{a_n}$ olan $\sum_n \dfrac{1}{a_n}$ serisi de ıraksaktır.

Prob. 18 $\sum_n |a_n|$ *ve* $\sum_n |b_n|$ *serileri yakınsak ise* $\sum_n \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2}$ *serisi de yakınsaktır.*

Çözüm : Elemanter aritmetikten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \leq \alpha + \beta \;\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 \leq \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \Leftrightarrow 0 \leq 2\alpha\beta$$

$$\sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2} \leq |a_n| + |b_n|$$

olur. Bu durumda,

$$0 \leq \sum_n \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2} \leq \sum_n (|a_n| + |b_n|) = \sum_n |a_n| + \sum_n |b_n| < \infty$$

elde edilir.

Prob. 19 $\sum_n \dfrac{1}{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}$ *serisi yakınsaktır?*

Çözüm : $1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} \leq 1 + 1 + \cdots + 1 = n$ ve

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}} \geq \frac{1}{n}$$

dir. $\sum_n \dfrac{1}{n}$ harmonik serisi ıraksak olduğundan, minorantı olan verilen seri de ıraksaktır.

Prob. 20 *Aşağıdaki serilerin yakınsaklığını inceliyiniz.*

a) $\sum_n \dfrac{n^n}{3^n n!}$ *b)* $\sum_n \dfrac{n^n}{(2n^2+1)^n}$

Çözüm : *a)* $a_n = \dfrac{n^n}{3^n n!} > 0$ için D'Alambert oran kriteri uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)!} \cdot \frac{3^n n!}{n^n} \\ &= \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{3} \end{aligned}$$

olur. $e < 3$ olduğundan, $\dfrac{e}{3} < 1$ ve $\sum_n a_n$ serisi yakınsaktır.

b) $a_n = \dfrac{n^n}{(2n^2+1)^n} > 0$ için kök kriteri uygulanırsa,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{(2n^2+1)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n^2+1} = 0 < 1$$

dir. Cauchy Kök kriterine göre $\sum\limits_n a_n$ serisi yakınsaktır.

Prob. 21 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{3^n - 2^n}{2^{2n}}$ *serisi yakınsak ise toplamını bulunuz.*

Çözüm : $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{3^n - 2^n}{2^{2n}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^n - \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ dir. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ ve $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ serileri geometrik serilerdir ve $0 < \dfrac{3}{4} < 1$, $0 < \dfrac{1}{2} < 1$ olduğundan yakınsaktır. Yakınsak iki serinin toplamı da yakınsak olduğundan $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{3^n - 2^n}{2^{2n}}$ serisi de yakınsaktır. Toplamını bulalım:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{2^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{3}{4}} - \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

olur.

Prob. 22 *Aşağıdaki serilerin yakınsaklığını inceleyiniz.*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ *b)* $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \dfrac{k^2+k}{k^4+1}$

Çözüm : *a)* $0 < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \to 0$.dır.

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = (\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}) \\ &\leq (\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}) = (n+2)-(n+1) = 1 \end{aligned}$$

olduğundan, Leibniz kriterine göre verilen seri yakınsaktır.

b) $S_n := \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{k^2+k}{k^4+1}, n \geq 2$ olsun.

$$\frac{k^2+k}{k^4+1} \leq \frac{2k^2}{k^4} = \frac{2}{k^2} \leq \frac{2}{k(k-1)}$$

dir. Buradan,

$$\frac{1}{2}S_n \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k(k-1)} = 1 - \frac{1}{n} < 1 \text{ ve } S_n < 2$$

bulunur. O hâlde, verilen seri yakınsaktır.

Prob. 23 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n+1}{2^n}$ *serisinin toplamını bulunuz.*

Çözüm : $\sum\limits_{n=0}^{m} \dfrac{n+1}{2^n} = 4 - \dfrac{m+3}{2^m}$ olduğunu tümev arımla gösterelim.
$m = 1$ için doğrudur. $m \in \mathbb{N}$ için doğru olsun.

$$\sum_{n=0}^{m+1} \frac{n+1}{2^n} = \sum_{n=0}^{m} \frac{n+1}{2^n} + \frac{m+1}{2^m} = 4 - \frac{m+3}{2^m} + \frac{m+1}{2^m} = 4 - \frac{(m+1)+3}{2^{m+1}}$$

olur. Buradan, $\lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{m} \dfrac{n+1}{2^n} = \lim\limits_{m\to\infty} \left(4 - \dfrac{m+3}{2^m}\right) = 4$ bulunur.

Prob. 24 *Aşağıdaki ifadelerin doğru veya yanlış olduğunu belirleyiniz. Kararınızı kanıtlayınız.*

1) $\sum\limits_n a_n$ *serisi yakınsak ise,* (a_n) *nin her* (a_{n_k}) *alt dizisi için* $\sum\limits_n a_{n_k}$ *serisi de yakınsaktır?*

2) (a_n) *bir sıfır dizisi ise* $\sum\limits_n (-1)^n a_n$ *serisi yakınsaktır?*

3) *Her mutlak yakınsak bir seri negatif olmayan bir sayıya yakınsar?*

4) *Cauchy serilerinin Cauchy çarpımı da Cauchy serisidir?*

Çözüm : 1) Yanlış. İfade yalnızca diziler için geçerlidir fakat seriler doğru değildir. Örneğin, $a_n = (-1)^n \dfrac{1}{n}$ için $\sum\limits_n a_n$ serisi yakınsaktır fakat $\sum\limits_n a_{2n}$ serisi ıraksaktır.

2) Yanlış. Örneğin $a_n = (-1)^n \dfrac{1}{n}$ bir sıfır dizisidir fakat $\sum\limits_n (-1)^n \cdot a_n = \sum\limits_n \dfrac{1}{n}$ serisi ıraksaktır.

3) Yanlış. $a_1 = -1$ ve $n \geq 2$ için $a_n = 0$ olsun. $\sum\limits_n a_n = -1$ serisi yakınsaktır ve hatta $\sum\limits_n |a_n| = 1$ mutlak yakınsaktır. Fakat $\sum\limits_n a_n$ serisi negatif bir sayıya yakınsar.

4) Yanlış. Karşıt örnek: $\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$ serisi mutlak yakınsaktır.

$$\left(\sum_n \frac{(-1)^n}{n}\right) \cdot \left(\sum_n \frac{(-1)^n}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(n-k)}$$

Sağdaki seri $n \to \infty$ iken sonsuza gider.

Prob. 25 *Aşağıdaki ifadelerin hangisi verilen tanıma denktir? Birden fazla ifade verilen tanıma denk yada denk olmayabilir.*

$\sum_n a_n$ serisi mutlak yakınsaktır.

1) (a_n) bir sıfır dizisidir?

2) Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\sum_n (a_n + \alpha)$ serisi mutlak yakınsaktır?

3) Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\sum_n (a_n \cdot \alpha)$ serisi mutlak yakınsaktır?

Çözüm : 1) $\sum_n a_n$ serisi mutlak yakınsaktır $\Leftrightarrow$ (a_n) (a_n) bir sıfır dizisidir, yanlıştır: $\sum_n \frac{1}{n}$ serisi $(\frac{1}{n})$ sıfır dizisi iyi bilinen örnektir.

2) "$\sum_n a_n$ serisi mutlak yakınsaktır $\Leftrightarrow$Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\sum_n (a_n + \alpha)$ serisi mutlak yakınsaktır" ifadesi yanlıştır: $\sum_n \frac{1}{n^2}$ serisi mulak yakınsaktır. Fakat $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ dizisi bir sıfır dizisi olmadığından $\sum_n \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ serisi yakınsak değildir.

3) $\sum_n a_n$ serisi mutlak yakınsaktır $\Leftrightarrow$Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\sum_n (a_n \cdot \alpha)$ serisi mutlak yakınsaktır, doğrudur: Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\sum_n (a_n \cdot \alpha)$ serisi mutlak yakınsak olsun. $\alpha = 1$ için $\sum_n a_n$ serisi de mutlak yakınsaktır. Tersine, $\sum_n a_n$ serisi yakınsak ise, tanıma göre $\sum_n |\alpha \cdot a_n|$ serisi yakınsaktır.

$$\sum_n |\alpha \cdot a_n| = \sum_n |\alpha| \cdot |a_n| = |\alpha| \sum_n |a_n|$$

den dolayı $\sum_n (a_n \cdot \alpha)$ serisi de mutlak yakınsaktır.

Prob. 26 *Aşağıdaki serilerin yakınsaklığını inceliyiniz.*

a) $\sum_n \frac{n^n}{3^n n!}$ *b)* $\sum_n \left(\frac{n}{2n^2+1}\right)^n$

Çözüm : *a)* $\sum_n \frac{n^n}{3^n n!}$, $a_n = \frac{n^n}{3^n n!} > 0$ dır.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)!} \cdot \frac{3^n n!}{n^n} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{3}$$

olur.$e < 3$ olduğundan, $\frac{e}{3} < 1$ ve $\sum_n a_n$ serisi yakınsaktır.

b) $\sum_n \left(\frac{n}{2n^2+1}\right)^n$, $a_n = \left(\frac{n}{2n^2+1}\right)^n > 0$ dır.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n^2+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n^2+1} = 0 < 1$$

dir. Cauchy Kök kriterine göre $\sum_n a_n$ serisi yakınsaktır.

Prob. 27 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{5^n (n!)^2}$ *serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.*

Çözüm : $a_n = \frac{(2n+1)!}{5^n (n!)^2}$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n > 0$ dır.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)!}{5^{n+1}\left[(n+1)!\right]^2} \frac{5^n (n!)^2}{(2n+1)!} \\ &= \frac{1}{5}\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+3)}{(n+1)^2} = \frac{4}{5} < 1 \end{aligned}$$

olduğundan verilen $\sum_n a_n$ serisi yakınsaktır.

Prob. 28 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 + (-1)^n}{(2n)!}$ *serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.*

Çözüm : Verilen seriyi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 + (-1)^n}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$ biçiminde iki serinin toplamı olarak yazalım. Birinci seri

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot n!}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n\cdot (n+1)\cdots (2n-1)\cdot 2n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)\cdots (2n-1)\cdot 2n} \end{aligned}$$

olur. Pozitif terimli bir seridir ve D'Alambert oran kriterini uygulayalım:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+2)\cdots(2n+1)\cdot(2n+2)}\cdot\frac{(n+1)\cdots(2n-1)\cdot 2n}{n!}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+1)\cdot(2n+2)} = \frac{1}{4} < 1\end{aligned}$$

bulunur. O hâlde birnici seri yakınsaktır.

İkinci seri, alterne seridir. $b_n = \dfrac{(-1)^n}{(2n)!}$ ve $\lim\limits_{n\to\infty}|b_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(2n)!} = 0$ dır.

$|b_{n+1}| - |b_n| = \dfrac{1}{(2n+2)!} - \dfrac{1}{(2n)!} < 0$ ve $\{|b_n|\}$ dizisi azalandır. Leibniz kriterine göre, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}$ alterne serisi yakınsaktır. Sonuç olarak, yakınsak iki serinin toplamı da yakınsak olduğundan, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2+(-1)^n}{(2n)!}$ serisi yakınsaktır.

Prob. 29 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n(n!)^2}{(2n)!}$ *serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.*

Çözüm : Verilen pozitif terimli bir seriye D'Alambert oran kriterini uygulayalım:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{3^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{3^n(n!)^2}\right\}\\ &= 3\cdot\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}\right\} = \frac{3}{4} < 1\end{aligned}$$

olur. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n(n!)^2}{(2n)!}$ serisi yakınsaktır.

Prob. 30 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$ *serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.*

Çözüm :. Serinin genel terimi $a_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$ dir.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$$

dir. Seri yakınsak olsaydı, genel teriminin limiti sıfır olurdu. (Sonuç 5.1) Buna göre, verilen seri ıraksaktır.

Prob. 31 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}}$ *serisinin yakınsaklığını $\alpha \geq 1$ inceleyiniz.*

Çözüm :. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi ile $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ serisi aynı karekterdedir. Bu teoreme göre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}}$ serisi ile

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n(\log 2^n)^{\alpha}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\log 2)^{\alpha}} = \frac{1}{(\log n)^{\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

serisi aynı karekterdedir. Bu seri $\alpha > 1$ için yakınsak ve $\alpha = 1$ için ıraksaktır.

Prob. 32 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\alpha)^n}$ *serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.*

Çözüm : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\alpha)^n}$ geometrik serisi yakınsak olması için $\left|\frac{1}{1+\alpha}\right| < 1$ gerçeklenmelidir.

$$\left|\frac{1}{1+\alpha}\right| < 1 \Leftrightarrow -1 < \frac{1}{1+\alpha} < 1 \Leftrightarrow -(1+\alpha) < 1 \vee 1+\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha > -2 \vee \alpha > 0$$

ve $\alpha > 0$ olur. $\frac{1}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\alpha)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^n - 1 = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\alpha}} - 1 = \frac{1}{\alpha}$ ve $\alpha = 3$ bulunur.

Prob. 33 *Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $\binom{x+y}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k}\binom{y}{n-k}$ gerçeklenir. Her $a, x \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$ için $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha+1}{k} x^k$ ve $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{k} x^k$ serilerinin mutlak yakınsak olduğunu gösteriniz. Serilerin Cauchy çarpımını bulunuz.*

Çözüm : $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\beta}{n} x^n$ serisinin mutlak yakınsaklığını oran kriteriyle gösterelim. Her $a, x \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$ için

$$\left| \frac{\binom{\beta}{n+1} x^{n+1}}{\binom{\beta}{n} x^n} \right| = |x| \cdot \left| \frac{\beta(\beta-1)\cdots(\beta-n)\cdot n!}{\beta(\beta-1)\cdots(\beta-n+1)\cdot(n+1)!} \right| = |x| \cdot \left| \frac{\beta - n}{n+1} \right| \to |x|$$

olur. Seri $|x| < 1$ için mutlak yakınsaktır. Cauchy çarpımını bulalım:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha+1}{k}x^k\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\alpha}{k}x^k\right) &= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha+1}{k}x^k\cdot\binom{-\alpha}{n-k}x^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha+1}{k}\cdot\binom{-\alpha}{n-k}\right\}x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{1}{n}x^n = 1+x\end{aligned}$$

Kuvvet Serileri

Prob. 34 $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$ *serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.*

Çözüm : $|x| \geq 1$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$|b_n| = |(n+1)x^n| = (n+1)\,|x|^n \geq n+1$$

olur. (b_n) bir sıfır dizisi değildir.Verilen seri $|x| \geq 1$ için ıraksakıtr. $|x| < 1$ olsun. $n \neq 0$ olsun. Oran kriterine göre

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \frac{n+2}{n+1}\cdot|x| \to |x|$$

olur. O hâlde seri $|x| < 1$ için yakınsaktır.

Prob. 35 $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$, $|x| < 1$ *serisinin toplamını bulunuz.*

$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$ serisi $|x| < 1$ için yakınsaktır. Kısmi toplamı S_n olsun.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(k+1)x^k = \sum_{k=1}^{n}kx^k + \sum_{k=1}^{n}x^k$$

olur. Sağdaki geometrik serinin toplamı

$$\frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}$$

dir. Soldaki serinin toplamının

$$\sum_{k=1}^{n} kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}$$

olduğunu, tüme varımla gösterelim. $n = 1$ için

$$1 \cdot x = \frac{1 \cdot x^{1+2} - (1+1)x^{1+1} + x}{(1-x)^2} = x$$

doğrudur. n için doğruluğunu kabul edelim.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} kx^k &= \sum_{k=1}^{n} kx^k + (n+1)x^{n+1} \\
&= \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2} + (n+1)x^{n+1} \\
&= \frac{(n+1)x^{n+3} - (n+2)x^{n+2} + x}{(1-x)^2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Verilen bağıntı her n için doğrudur. Kısmi toplamı hesaplayalım;

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} kx^k + \sum_{k=1}^{n} x^k \\
&= \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2} + \frac{x}{1-x}
\end{aligned}$$

dir. Önceki problemde yakınsaklığı gösterilen seriye göre,

$$\sum_{n}^{\infty} nx^{n+2} \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^{n+1}$$

serileri de yakınsaktır. $x \in (-1, 1)$ iken $n \to \infty$ iken nx^{n+2} ve $(n+1)x^{n+1}$ genel terimli diziler sıfır dizisidir.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{0 - 0 + x}{(1-x)^2} + \frac{x}{1-x} = \frac{x(2-x)}{(1-x)^2}$$

elde edilir.

Prob. 36 $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^2 x^n$ *serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.*

Çözüm : D'Alambert oran kriterini uygulayalım:

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2 \cdot |x| \to |x|$$

olur. Seri $|x| < 1$ için yakınsak ve $|x| > 1$ için ıraksakır. $x = 1$ için $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n(n+1)^2$ alterne serisi için $a_n = (n+1)^2$ genel terimli (a_n) dizisi, sıfır dizisi değildir. Bu nedenle, $x = 1$ için seri ıraksaktır.

Prob. 37 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *serisinin yakınsaklık yarıçapı* $R, (0 < R < \infty)$ *ise aşağıdaki serilerin yakınsaklık yarıçapını bulunuz.*

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n a_n x^n$ 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^n a_n x^n$

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} a_n x^n$ 4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^2 x^n$

Çözüm : 1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n a_n x^n$ serisinin yakınsaklık yarıçapı r, Hadamard förmülünden bulunur:

$$\frac{1}{r} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|2^n a_n|} = 2\,\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2}{R} \Rightarrow r = \frac{R}{2}$$

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^n a_n x^n$ serisinin yakınsaklık yarıçapı r, Hadamard förmülünden bulunur:

$$\frac{1}{r} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|n^n a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n \sqrt[n]{|a_n|} = \infty \Rightarrow r = 0$$

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} a_n x^n$ serisinin yakınsaklık yarıçapı r, Hadamard förmülünden bulunur:

$$\frac{1}{r} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{n^n}{n!} a_n\right|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \cdot \frac{1}{R} = \frac{e}{R} \Rightarrow r = \frac{R}{e}$$

4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^2 x^n$ serisinin yakınsaklık yarıçapı r, Hadamard förmülünden bulunur:

$$\frac{1}{r} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n^2|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)^2 = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{R^2} \Rightarrow r = R^2$$

Prob. 38 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{3n}{n} x^{2n}$ *serisinin yakınsaklık yarıçapını bulunuz.*

Çözüm : $a_n = \binom{3n}{n} x^{2n} = \dfrac{(3n)!}{n!\cdot(2n)!}x^{2n}$ olsun.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(3+\frac{3}{n}\right)\ (3+\frac{2}{n})(3+\frac{1}{n})}{(1+\frac{1}{n})(2+\frac{2}{n})(3+\frac{3}{n})}\right|\cdot|x|^2 \ = \frac{27}{4}\,|x|^2\ < 1$$

ve böylece, serinin yakınsaklığı için $|x| < \dfrac{2}{\sqrt{27}}$ gerçeklenmelidir. Verilen kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı $R = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ tür.

Prob. 39 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n}{n^2+2}(x-1)^n$ *serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz.*

Çözüm : $a_n = \dfrac{n}{n^2+2}(x-1)^n$ diyelim.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{(n+1)^2+2}(x-1)^{n+1}\frac{n^2+2}{n(x-1)^n}\right| \\ &= |x-1|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2}{n^2+2n+3} = |x-1|<1\end{aligned}$$

olur. Verilen kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı $R = 1$ dir.

i) $x-1=-1$ için: $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{n^2+2}$ alterne serisi elde edilir.

$$\lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+2} = 0$$

olur. $(|a_n|)$ dizisi bir sıfır dizisidir.

$$\begin{aligned}|a_{n+1}|-|a_n| &= \frac{n+1}{(n+1)^2+2}-\frac{n}{n^2+2} \\ &= -\frac{(n-1)(n+2)}{(n^2+2n+3)(n^2+2)}<0\end{aligned}$$

ve $(|a_n|)$ dizisi azalandır. Leibniz kriterine göre $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{n^2+2}$ alterne serisi yakınsaktır.

ii) $x-1=1$ için: $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n}{n^2+2}$ serisi elde edilir. $b_n := \dfrac{1}{n}$ seçelim.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+2} = 1(\neq 0,\infty)$$

olduğundan seriler aynı karakterdedir. $\sum\limits_{n}\dfrac{1}{n}$ harmonik serisi ıraksak olduğundan $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n}{n^2+2}$ serisi de ıraksaktır. O hâlde verilen kuvvet serisinin yakınsakılık aralığı $0\le x<2$ dir.

Prob. 40 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n+1}(x+2)^n$ *serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz.*

Çözüm : D'Alambert oran kriterini uygulayalım:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2(x+2)^{n+1}}{n+2}\cdot\frac{n+1}{n^2(x+2)^n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|(x+2)\frac{(n+1)^2(n+1)}{n^2(n+2)}\right| \\
&= |x+2|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2(n+1)}{n^2(n+2)} = |x+2| < 1
\end{aligned}$$

$x+2=1$ için $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n+1}$ serisi ıraksak,

$x+2=-1$ için $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{n+1}$ alterne serisi ıraksaktır.

O hâlde $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n+1}(x+2)^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık aralığı $-3<x<-1$ dir.

Prob. 41 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}(x+2)^n$ *serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz.*

Çözüm : D'Alambert oran kriterini uygulayalım:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+2)(x+2)^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{(n+1)(x+2)^n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|(x+2)\frac{n^2(n+2)}{(n+1)^2(n+1)}\right| \\
&= |x+2|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(n+2)}{(n+1)^2(n+1)} = |x+2| < 1
\end{aligned}$$

dir.

$x+2=1$ için $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2}$ olur.$b_n=\frac{1}{n}$ seçelim. $a_n=\frac{n+1}{n^2}$ olmak üzere, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$ dir. Karşılaştırma kriterinin limit biçimine göre, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serisi ile $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi aynı karakterdedir. $\sum_{\substack{n=1\\ n}}^{\infty}\frac{1}{n}$ serisi ıraksak olduğundan , $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2}$ serisi ıraksaktır.

$x+2=-1$ için $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{n^2}$ alterne serisi yakınsaktır.

O hâlde $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2}(x+2)^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık aralığı $-3\le x<-1$ dir.

Prob. 42 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5n^3+2}(x-2)^n$ *serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz.*

Çözüm : D'Alambert oran kriterini uygulayalım:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{5(n+1)^3+2}(x-2)^{n+1}\cdot\frac{5n^3+2}{n(x-2)^n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|(x-2)\frac{(5n^3+2)(n+1)}{(5(n+1)^3+2)n}\right| \\
&= |x-2|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{5n^4+5n^3+2n+2}{5n^4+15n^3+15n^2+7n}=|x-2|\cdot 1<1
\end{aligned}$$

dir. Uç noktalardaki durumu inceleyelim.

$x-2=1$ için $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5n^3+2}$ serisinin yakınsaklığı gösterilir.

$x-2=-1$ için $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{5n^3+2}$ alterne serisinin yakınsaklığı Leibniz kriterine göre gösterilir.

O hâlde $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5n^3+2}(x-2)^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık aralığı $1\le x\le 3$ dür.

Prob. 43 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n^3+5}(x+2)^n$ *serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz.*

Çözüm : D'Alambert oran kriterini uygulayalım:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{2(n+1)^3+5}(x+2)^{n+1}\cdot\frac{2n^3+5}{n(x+2)^n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|(x+2)\frac{(2n^3+5)(n+1)}{(2(n+1)^3+5)n}\right| \\
&= |x-2|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2n^4+2n^3+5n+5}{2n^4+6n^3+6n^2+7n}=|x+2|\cdot 1<1
\end{aligned}$$

dir. Uç noktalardaki durumu inceleyelim.

$x+2=1$ için $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n^3+5}$ serisinin yakınsaklığı gösterilir.

$x+2=-1$ için $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{2n^3+5}$ alterne serisinin yakınsaklığı Leibniz kriterine göre gösterilir. O hâlde, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n^3+5}(x+2)^n$ serisinin yakınsaklık aralığı $[-3,-1]$ dir.

Prob. 44 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{n^2+2}(x+1)^n$ *serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz.*

Çözüm : $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{n^2+2}(x+1)^n$ kuvvet serisi için $a_n=\frac{n}{n^2+2}(x+1)^n$ diyelim.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{(n+1)^2+2}(x+1)^{n+1}\frac{n^2+2}{n(x+1)^n}\right|\\ &= |x+1|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2}{n^2+2n+3}=|x+1|<1\end{aligned}$$

olur. Verilen kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı $R=1$ dir.

i) $x+1=-1$ için: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2+2}$ alterne serisi elde edilir.

$$\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+2}=0$$

olur. $(|a_n|)$ dizisi bir sıfır dizisidir.

$$\begin{aligned}|a_{n+1}|-|a_n| &= \frac{n+1}{(n+1)^2+2}-\frac{n}{n^2+2}\\ &= -\frac{(n-1)(n+2)}{(n^2+2n+3)(n^2+2)}<0\end{aligned}$$

ve $(|a_n|)$ dizisi azalandır. Leibniz kriterine göre $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2+2}$ alterne serisi yakınsaktır.

ii) $x+1=1$ için: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{n^2+2}$ serisi elde edilir. $b_n:=\frac{1}{n}$ seçelim.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+2}=1\ ,\ (\neq 0,\infty)$$

olduğundan seriler aynı karakterdedir. $\sum_n\frac{1}{n}$ harmonik serisi ıraksak olduğundan $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{n^2+2}$ serisi de ıraksaktır. O hâlde verilen kuvvet serisinin yakınsakılık aralığı $-2\leq x<0$ dir.

Prob. 45 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{3n+4}\right)^2 x^n$ *kuvvet serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.*

Çözüm : $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{3n+4}\right)^2 x^n$ kuvvet serisi için $b_n=\left(\dfrac{n+1}{3n+4}\right)^2 x^n$ dir.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{n+2}{3n+7}\right)^2 x^{n+1}\cdot\left(\frac{3n+4}{n+1}\right)^2\frac{1}{x^n}\right| \\ &= |x|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+2)^2(3n+4)^2}{(3n+7)^2(n+1)^2}\right| = |x|\end{aligned}$$

Verilen kuvvet serisi $|x|<1$ için yakınsaktır. $|x|<1 \Leftrightarrow -1<x<1$ dir. Uç noktalardaki durumu inceleyelim:

$x=1$ için $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{3n+4}\right)^2$ pozitif terimli seridir. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{3n+4}\right)^2=\dfrac{1}{9}\neq 0$ olduğundan seri ıraksaktır.

$x=-1$ için $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{n+1}{3n+4}\right)^2$ alterne serisi için ; $a_n=(-1)^n\left(\dfrac{n+1}{3n+4}\right)^2$ dir.

$\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+1}{6n+3}\right)^2=\dfrac{1}{9}$ ve $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n-1}=-\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+1}{6n+3}\right)^2=-\dfrac{1}{9}$ bulunur. O hâlde, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ yoktur. Bir serinin yakınsaklığı için gerekli koşul olan $\lim\limits_{n}a_n=0$ gerçeklenmez. Böylece $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{n+1}{3n+4}\right)^2$ alterne serisi ıraksaktır.

Prob. 46 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}(x-3)^{2n+1}$ *kuvvet serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz.*

Çözüm :.D'Alambert oran kriterini uygulayalım:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!}(x-3)^{2n+3}\cdot\frac{(2n)!}{(-1)^n(x-3)^{2n+1}}\right| = |x-3|^2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}=0$$

ve $R=\infty$ dur. O hâlde, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}(x-3)^{2n+1}$ kuvvet serisi, her $x\in\mathbb{R}$ için yakınsaktır.

Prob. 47 $\sum\limits_{n}\sqrt{2^n+3^n}x^n$ *serisinin yakınsaklık yarıçapını bulunuz.*

Çözüm : $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sqrt{2^n+3^n}}=\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n}}=\sqrt{\max\{2,3\}}=\sqrt{3}$ tür.

Yakınsaklık yarıçapı $R=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sqrt{2^n+3^n}}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ bulunur.

Prob. 48 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n(4^n-1)}(x-2)^n$ *serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz.*

Çözüm : Kök kriterine göre,

$$\sqrt[n]{\frac{2^n}{n(4^n-1)}} = 2\,\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{4^n-1}}$$

$$4\frac{1}{\sqrt[n]{2}} = 4\sqrt[n]{\frac{1}{2}} = \sqrt[n]{4^n\left(1-\frac{1}{2}\right)} \leq \sqrt[n]{4^n-1} \leq \sqrt[n]{4^n} = 4$$

eşitsizliğinden $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n-1} = 4$ elde edilir. Ayrıca $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$ dir. Bununla

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n(4^n-1)}} = \frac{1}{2}$$

çıkar. Yakınsaklık yarıçapı $R = 2$ dir. Kuvvet serisi $|x-2| < 2$ için mutlak yakınsaktır. $|x-2| = 2$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x-2)^n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n(4^n-1)}2^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n(4^n-1)} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

ve bu nedenle seri ıraksaktır.

Prob. 49 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n!}$ *serisinin toplamını bulunuz.*

Çözüm : Kök kriterine göre,

$$\sqrt[n]{\frac{e^{nx}}{n!}} = \frac{e^x}{\sqrt[n]{n!}} \to 0$$

olur. Seri yakınsaktır. Üstel fonksiyonun kuvvet serisie açılımından, verilen serinin toplamı çıkar:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e^x)^n}{n!} = e^{e^x}$$

Prob. 50 *Aşağıdaki serilerin toplamını bulunuz.*

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ 2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n-2}x^{n-1}$

Çözüm : 1) $n = \frac{1}{2} \cdot 2n = \frac{1}{2} \cdot (2n+1-1) = \frac{1}{2} \cdot (2n+1) - \frac{1}{2}$ dir.

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ &= \frac{1}{2} x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n)!} x^{2n} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ &= \frac{1}{2}(x \cos x - \sin x) \end{aligned}$$

olur. $S(1) = \frac{1}{2}(\cos 1 - \sin 1)$ dir.

2) $\frac{1}{n^2+n-2} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2} \right)$ dir. $0 < x < 1$ için

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n-2} x^{n-1} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-1} x^{n-1} - \frac{1}{3} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2} x^{n-1} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \frac{1}{3x^2} \sum_{n=4}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \\ &= \frac{1}{3} \log(1+x) + \frac{1}{3x^2} \left\{ \log(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right\} \end{aligned}$$

olur. $S(1) = \frac{2}{3} \ \log 2 - \frac{5}{18}$ dir.

Problemler

Prob. 51 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(1+\alpha)^n}$, $\alpha \in (0,\infty)$ *geometrik serisinin toplamı* $\dfrac{1}{3}$ *olacak biçimde* α *reel sayısını belirleyiniz.*

Prob. 52 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+1}{2n+3}\right)^2 x^n$ *kuvvet serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.*

Prob. 53 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+1}{3n+4}\right)^2 x^n$ *kuvvet serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.*

Prob. 54 $\sum\limits_{n} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ *serisinin ıraksak olduğunu gösteriniz.*

Prob. 55 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{(n+1)!}$ *serisinin (varsa) toplamını bulunuz.*

Prob. 56 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n (n!)^2}{(2n)!}$ *serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.*

Prob. 57 $\sum\limits_{n} \dfrac{4^n n!}{n^n}$ *serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.*

Prob. 58 $\sum\limits_{n} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}}$ *serisinin ıraksak olduğunu gösteriniz.*

Prob. 59 $\sum\limits_{n} \dfrac{(2n)! \cdot x^{2n}}{(n!)^2}$ *serisinin yakınsaklık aralığını belirleyiniz.*

Prob. 60 $\sum\limits_{n} \dfrac{(n!)^2 \cdot x^{2n}}{(2n)!}$ *serisinin yakınsaklık aralığını belirleyiniz.*

Prob. 61 $\sum\limits_{n} \dfrac{3^n (x+1)^n}{n^2}$ *kuvvet serisinin yakınsaklık aralığını belirleyiniz.*

Prob. 62 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\dfrac{2n-1}{3n-2}\right)^n$ *serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.*

Prob. 63 *Cauchy çarpımı yardımıyla*

a) $\cos^2 x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dbinom{2n}{2k}\right) x^{2n} = \dfrac{1}{2}\,(1+\cos 2x)$

b) $\sin^2 x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+2)!} \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dbinom{2n+2}{2k+1}\right) x^{2n} = \dfrac{1}{2}\,(1-\cos 2x)$

özdeşlikleri gösteriniz.

Prob. 64 $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ *serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.*

Prob. 65 $\sum_n \sqrt{\frac{n+5}{n^4-\sqrt{n}+7}}$ *serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.*

Prob. 66 $\sum_n \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}}$ *serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.*

Prob. 67 $\sum_n (-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ *serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.*

Prob. 68 $\sum_n \left(\frac{1}{n^2}+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ *serisi yakınsak fakat mutlak yakınsak değildir?*

Prob. 69 *(a_n) dizisi $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ genel terimi ile veriliyor. (a_n) dizisinin artan ve üstten sınırlıdır.Gösteriniz. (Yardım: Her $k \geq 2$ için $k^2 > (k-1).k$ olduğunu kullanınız.)*

Prob. 70 *Aşağıdaki serilerin yakınsaklığını inceleyiniz. Yakınsak ise toplamını bulunuz.*

a) $\sum_n \frac{n^n}{3^n n!}$ *b)* $\sum_n (\frac{n}{2n^2+1})^n$

Prob. 71 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ *serisinin karakterini inceleyiniz.*

Prob. 72 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ *serisinin karakterini inceleyiniz.*

Prob. 73 $\sum_n \frac{1}{(n+\alpha)(n+\alpha+1)}$ *,($\alpha > 0$) serisinin yakınsaklığını inceleyiniz. Yakınsak ise toplamını bulunuz.*

Prob. 74 *Aşağıda verilen a_n genel terimli serilerinin yakınsaklığını inceleyiniz.*

a) $a_n = \frac{1}{n\sqrt[n]{n+1}}$ *b)* $a_n = \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$

Prob. 75 $\sum_n \frac{(n!)^2 \cdot x^{2n}}{(2n)!}$ *serisinin yakınsaklık aralığını belirleyiniz.*

Prob. 76 $\sum_n \frac{(2n)! \cdot x^{2n}}{(n!)^2}$ *serisinin yakınsaklık aralığını belirleyiniz.*

Prob. 77 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n(x+1)^n}{n^2}$ *kuvvet serisinin yakınsaklık aralığını belirleyiniz.*

Prob. 78 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{x}{4}-1\right)^n$ *serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz.*

Prob. 79 *Aşağıdaki serilerin yakınsaklığını inceleyiniz.*

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{n^2}$

2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n}{n+3}$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n^2}{n+1}$

5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{2n+1}{5n+1}$

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{n}}$

7. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot \sin\dfrac{1}{n}$

9. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-2)^n tan(2^{-n})$

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^n \cdot n!}{n^n}$

Prob. 80 *Leibniz kriterini kullanarak şağıdaki serilerin yakınsaklığını inceleyiniz.*

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\dfrac{1}{n^3}$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n-1}$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{n+1}{4n}$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!}$

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}}$

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\dfrac{2n-1}{3n-2}\right)^n$

Prob. 81 *Aşağıdaki geometrik serilerin toplamını bulunuz.*

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{3^n+2^n}{4^n}$

2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-3)\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2n}$

3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n+5^n}{2^n\cdot 5^n}$

4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (0,33)^n$

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^{n+4}}{7^{n-1}}$

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-2)^n \cdot 3^{-n-1}$

7. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n^2+n+3}\cdot 27^{\frac{-n+1}{3}}$

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2+(-1)^n}{(2n)!}$

Prob. 82 *Karşılaştırma kriteri kullanarak aşağıdaki serilerin yakınsaklığını inceleyiniz.*

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-1}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}-1}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3}$

5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}$

6. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n+5^n}{7^n}$

Prob. 83 *Karşılaştırma kriterinin limit biçimini kullanarak aşağıdaki serilerin yakınsaklığını inceleyiniz.*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot \sin\frac{1}{n}}{3^n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot \sin\frac{1}{(2n)^n}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^3-n-1}$

5. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4n-3}{n^3+5n-7}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

8. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$

9. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2}-1}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\frac{1}{n}$

Prob. 84 *D'Alambert kriterini kullanarak şağıdaki serilerin yakınsaklığını inceleyiniz.*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2+5}$

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot 3^n}{10^n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! \cdot 2^n}{n^{2n}}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

Prob. 85 *Cauchy kriterini kullanarak aşağıdaki serilerin yakınsaklığını inceleyiniz.*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n}\right)^n$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+4}{2n-1}\right)^{2n}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{n+4}\right)^n$

4. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\log n}{1000}\right)^n$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{n^2}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (arcsin\frac{1}{n})^n$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{arctann}{2}\right)^n$